LOGIQUE QUANTIQUE ET INTRICATION

Pierre UZAN

ABSTRACT: Due to the failure of the classical principles of bivalence and verifunctionality, the logic of experimental propositions relative to quantum systems cannot be interpreted in Boolean algebras. However, we cannot say neither that this logic is captured by orthomodular lattices, as claimed by many authors along the line of Birkhoff's and von Neumann's standard approach. For the alleged violation of distributivity is based on the possibility of combining statements relative to complementary contexts, which does not refer to any experience and, consequently, has no meaning. Indeed, quantum logic should be interpreted in partial, transitive Boolean algebras whose compatibility relation limits the application of the connectives within each of its Boolean sub-algebras, which refer to partial, classical descriptions. Moreover, this approach of quantum logic makes it possible to deal with composite systems, which was not possible to do within the standard approach, and then to deal with the fundamental notion of quantum entanglement. The latter notion can be represented by a series of axioms of the object language that restrict the set of experimental statements bearing on a composite system, while its close link to the notion of complementarity can be expressed in the metalanguage.

KEYWORDS: quantum logic, partial boolean algebra, complementarity, entanglement

1. Introduction: théorie quantique et intrication

Le paradigme quantique a remis en question des principes que l'on pensait immuables et sur lesquels repose notre mode de représentation classique du monde. Il s'agit, par exemple, du déterminisme de la mécanique classique qui s'accorde difficilement avec le caractère probabiliste irréductible[1] des prédictions données par la théorie quantique ou de la variation continue des grandeurs en physique classique qui s'accorde mal avec le caractère discret du spectre de certaines observables définies pour un système lié en physique quantique. Mais c'est le phénomène d'intrication qui semble remettre en question les principes les plus profondément ancrés. En effet, ce dernier remet en question le principe de

[1] En effet, les probabilités quantiques ne sont pas des probabilités d'ignorance, comme en physique statistique classique, mais elles reflètent les propriétés structurelles de la théorie quantique et, tout particulièrement, celles liées à l'existence de contextes expérimentaux complémentaires. Voir par exemple Destouches-Février Paulette, *La structure des théories physiques*, Coll. "Philosophie de la matière" (Paris: Presses Universitaires de France, 1951); Michel Bitbol, *Mécanique quantique. Une introduction philosophique* (Paris: Champs Flammarion, 1996).

causalité locale selon lequel les corrélations entre deux évènements qui n'ont pas de connexion causale directe doivent nécessairement trouver leur origine dans l'intersection de leurs cônes de lumière passés, c'est à dire dans l'existence d'une cause commune située dans leur passé commun.

En outre, comme l'ont noté certains chercheurs, la propriété d'intrication des états à partir de laquelle peuvent être expliqués les autres effets typiquement quantiques (comme la contextualité des phénomènes, le phénomène d'interférences ou la complémentarité des observables) ne concerne pas seulement le domaine matériel (et, en particulier, le domaine de la physique microscopique) mais aussi des domaines très divers de la vie, et de façon non exceptionnelle. En effet, lorsque cette propriété est considérée dans un cadre théorique généralisé où toute référence a priori au monde physique a été éliminée,[2] elle permet d'expliquer la nature des corrélations psychophysiques,[3] de résoudre les paradoxes de la perception[4] ou ceux de la théorie classique de la décision.[5] Par conséquent, nous pouvons dire qu'elle constitue une caractéristique essentielle de la réalité phénoménale, « essentielle » tout autant par sa fréquence d'occurrence que par les bouleversements conceptuels profonds auxquels elle donne lieu. Je suggère donc, dans le prolongement des propositions qui ont été formulées pour construire une logique quantique[6], de développer une « logique de l'intrication » capable de rendre compte de façon explicite des modifications de notre mode de pensée qu'implique cette caractéristique essentielle de notre expérience.

2. La logique classique des propositions expérimentales et sa remise en question

Les énoncés descriptifs les plus simples de la physique classique sont de la forme « l'objet x a la propriété P », énoncé qui sera dit « vrai » si x possède effectivement la propriété P et « faux » dans le cas contraire. L'ensemble des énoncés descriptifs

---

[2] Harald Atmanspacher, Hartmann Römer, Harald Walach, "Weak Quantum Theory: Complementarity and Entanglement in Physics and Beyond," *Foundations of Physics* 32 (2002): 379–406.

[3] Pierre Uzan, "On the Nature of Psychophysical Correlations," *Mind and Matter* 12, 1 (2014): 7-36.

[4] Harald Atmanspacher, Thomas Filk et Hartmann Römer, "Théorie quantique faible: cadre formel et applications," in *Théorie quantique et sciences humaines,* ed. Michel Bitbol (Paris: CNRS Editions, 2009).

[5] Diederik Aerts, Sandro Sozzo, "Quantum Structure in Economics: The Ellsberg Paradox," ArXiv:1301.0751 v1 [physics.soc-ph] 4 Janv 2013.

[6] Je fais allusion, en particulier, aux travaux de Birkhoff et von Neumann, Destouche Février, Jauch et Piron, Dalla Chiarra, Hugues et Bitbol, travaux qui seront mentionnés et expliqués plus précisément ci-après.

est clos par l'opération unaire de négation, notée $\urcorner$ dans la suite, et par les opérations binaires de conjonction, notée $\wedge$, et de disjonction, notée $\vee$. La valeur de vérité d'un énoncé complexe, qui ne peut être, lui aussi, que « vrai » ou « faux », est déterminée par les valeurs de vérité des énoncés plus simples qui le composent en utilisant les tables de vérité du calcul propositionnel classique. L'ensemble de ces énoncés descriptifs muni de la négation $\urcorner$ et des opérations de conjonction $\wedge$ et de disjonction $\vee$ qui sont associatives, commutatives et distributives l'une par rapport à l'autre, et pour lequel on peut définir un énoncé tautologique, notée **V**, et une contradiction, notée **F**, constitue une interprétation particulière (énoncés « descriptifs ») de la logique classique L_{cl} dont la structure est une algèbre de Boole (ou un treillis de Boole[7]). La structure de la logique classique est ainsi isomorphe à l'algèbre de Boole constituée par l'ensemble $\mathsf{P}(E)$ des parties d'un ensemble E ordonné par la relation d'inclusion et muni des opérations de complémentation, d'intersection et de réunion :

$$(\mathsf{P}(E), \subseteq, \mathrm{Compl}, \cap, \cup) ,$$

l'ensemble E et l'ensemble vide $\varnothing$ correspondant, respectivement, aux énoncés T et $\perp$ définis ci-dessus.

Cependant, la construction brièvement rappelée ci-dessus pour la logique classique repose sur les deux hypothèses suivantes qui sont remises en question dans le domaine quantique -qu'il s'agisse de la physique quantique au sens strict ou de la théorie quantique généralisée mentionnée dans l'introduction:

1) <u>le principe de bivalence</u>, c'est à dire l'affirmation selon laquelle un énoncé est soit vrai, soit faux, et qu'il ne peut avoir d'autres valeurs de vérité. Le principe de bivalence de la logique classique suppose, en fait, d'accepter un principe de réalisme local stipulant que les objets ont, à chaque instant, des propriétés bien définies et qu'il y aurait donc toujours un sens a priori à attribuer une valeur de vérité, vrai ou faux, à l'énoncé « l'objet x a la propriété P ». Or, dans le domaine quantique, il n'y a généralement pas de sens à assigner l'une de ces deux valeurs de vérité à un tel énoncé. Tout au plus, en *physique* quantique, il sera possible d'assigner à un tel énoncé une *probabilité conditionnelle* d'occurrence calculée par la règle de Born : la probabilité qu'une mesure effectuée sur l'objet x préparé dans un état donné confirme qu'il vérifie bien la propriété P. Les valeurs de vérité « vrai » et « faux » ne peuvent être assignées à un énoncé que dans les cas

[7] Ces deux structures sont équivalentes en définissant la relation d'ordre $\leq$ du treillis de la façon suivante : $a \leq b$ ssi $a = a \wedge b$ ssi $b = a \vee b$. La relation d'ordre et les opérations logiques seront en fait toujours représentées ensemble dans la description formelle des différentes structures utilisées.

particuliers où cette probabilité est, respectivement, égale à 1 ou à 0. Dans le but d'assigner une valeur de vérité à un énoncé qui ne répond pas à ces conditions particulières (énoncé « certain » ou « toujours faux »), plusieurs stratégies ont été envisagées : on peut soit essayer de maintenir quand même une sémantique bivalente en se référant à la vérification expérimentale[8] de cet énoncé, soit rajouter une troisième valeur de vérité, comme par exemple « indéterminé » selon Reichenbach ou « faux absolu » selon Destouches Fevrier,[9] soit encore définir la valeur de vérité d'un énoncé par la probabilité conditionnelle[10] de sa réalisation dans la mesure où la théorie quantique nous permet de calculer cette probabilité.

2) la vérifonctionnalité de la logique classique, c'est à dire le fait que la valeur de vérité d'un énoncé complexe est complètement déterminée par celles des énoncés plus simples qui le composent en utilisant les tables de vérité relatives aux opérations logiques utilisées dans cet énoncé. Cette hypothèse de vérifonctionnalité est aussi remise en question dans le domaine quantique à cause de la propriété de *contextualité* de la théorie quantique. La propriété de contextualité désigne le fait que le phénomène observé dépend de façon essentielle du contexte expérimental où il est observé, qu'il n'a pas d'existence indépendante de ce contexte. Par exemple, l'énoncé « le spin selon la direction Y de l'électron est + ½ » se réfère à l'expérience consistant à mesurer ce spin, notamment à l'aide d'un appareil de Stern et Gerlach orienté selon la direction Y, et ne renvoie pas a priori à une propriété intrinsèque de cet électron qu'il posséderait indépendamment de cette expérience. La *contextualité* de la théorie quantique a pour conséquence que la conjonction des deux énoncés renvoyant, respectivement, à la mesure d'observables complémentaires (et donc à des contextes expérimentaux complémentaires) ne renvoie à *aucun dispositif permettant sa vérification et que sa valeur de vérité*[11] *ne peut donc être calculée à partir de celles de ces deux énoncés.* C'est, par exemple, le cas de la conjonction des deux énoncés « le spin de l'électron selon la direction Y est + ½ » et « le spin de l'électron selon la direction Z est + ½ »

[8] Ou, ce qui revient au même, selon la formulation adoptée par von Neuman, en ne considérant que les deux valeurs de vérité possibles (0 ou 1) du projecteur associé à la propriété testée.

[9] Hans Reichenbach, *Philosophie Foundations of Quantum Mechanics* (Mineola, N.Y.: Dover, 1944); Destouches-Février, *La structure des théories physiques*. Les propositions de logiques trivalentes faites par ces auteurs ne seront pas retenues ici dans la mesure où elles attribuent une valeur de vérité à des conjonctions et des disjonctions d'énoncés renvoyant à des dispositifs expérimentaux (ou à des observables) complémentaires alors que ces combinaisons n'ont, en fait, aucun sens physique dans ce cas.

[10] Ce qui peut être discuté si l'on pense que la notion de « vérité » utilisée devrait refléter un état actuel du monde, comme c'est le cas pour un énoncé descriptif de la physique classique.

[11] Quelque soit d'ailleurs la façon dont cette valeur de vérité est définie.

qui ne renvoie à aucun dispositif expérimental permettant de mesurer *à la fois* le spin selon Y et selon Z alors que chacun d'eux renvoie à un dispositif de Stern et Gerlach orienté, respectivement, selon les directions Y et Z et permettant de le vérifier.

3. La logique quantique standard ne permet pas de représenter la complémentarité et l'intrication

Une première caractérisation de la logique quantique formulée à partir de la structure mathématique de la théorie quantique (formalisme des espaces de Hilbert et, corrélativement, algèbre C* des observables) avait été donnée par Birkhoff et von Neumann[12] en 1936, caractérisation qui a été précisée plus récemment par Jauch et Piron.[13] Ces auteurs ont affirmé que l'ensemble des énoncés descriptifs d'un système quantique muni des connecteurs de conjonction, de disjonction et de négation, qui ne peut plus être mis en correspondance avec l'algèbre de Boole des parties d'un ensemble, est un treillis orthomodulaire, où la propriété d'orthomodularité, qui désigne une propriété plus faible que la distributivité, s'écrit :

$$\text{si } a \leq b \text{ alors } b = a \vee (b \wedge \urcorner a),$$

$\urcorner a$ étant l'énoncé correspondant au complément orthogonal du sous-espace A de H associé à l'énoncé a. Cette structure est isomorphe à l'ensemble des sous-espaces clos de l'espace de Hilbert relatif à ce système partiellement ordonné par la relation d'inclusion ensembliste et muni des opérations d'intersection, de somme directe et de complémentation orthogonale :

$$(C(H), \subseteq, \cap, \oplus, \perp) ,$$

où l'espace H correspond à la tautologie **V** alors que l'espace ne contenant que le vecteur nul {0} correspond à l'antilogie **F**.

Cependant, cette caractérisation « standard » de la logique quantique pose problème dans la mesure où, comme nous l'avons noté ci-dessus pour les propositions expérimentales relatives au spin d'une particule dans deux directions différentes -et comme le souligne Bitbol,[14] une telle structure rassemble des classes d'énoncés pouvant renvoyer à des contextes expérimentaux complémentaires et

---

[12] Garrett Birkhoff et John Von Neumann, "The Logic of Quantum Mechanics," *The Annals of Mathematics,* 2nd Ser. 37, 4 (1936): 823-843.

[13] J.M. Jauch et C. Piron, "On the Structure of Quantal Proposition Systems," in *The Logico-Algebraic Approach to Quantum Mechanics: Historical Evolution*, ed. C. A. Hooker (Dordrecht: D. Reidel, 1975), 427-436 .

[14] Bitbol, *Mécanique quantique,* § 1.2.10.

leur combinaison (conjonction ou disjonction) n'a donc *aucun sens physique* puisqu'elle ne renvoie à aucun dispositif expérimental permettant sa vérification. Ces combinaisons d'énoncés relevant de contextes expérimentaux complémentaires doivent donc être considérées comme *des énoncés mal formés.*

En outre, une conséquence fâcheuse de cette approche logique de la théorie quantique proposée par Birkhoff et von Neumann ainsi que de leurs prolongements actuels,[15] apparaît lorsque le système considéré est un système composé. Comme l'ont montré Aerts[16] ainsi que Randall et Foulis[17] par des moyens différents, aucune « structure-produit » ayant les mêmes propriétés que celles associées à chacun des deux systèmes composés, et en particulier l'orthomodularité qui est la caractéristique essentielle de la logique quantique standard, ne peut être construite.

Ces deux remarques montrent ainsi que la logique quantique standard, telle qu'elle a été proposée par ses fondateurs et qu'elle est aujourd'hui développée, souffre de deux problèmes sérieux (qui sont d'ailleurs liés, comme nous le verrons dans la suite) : 1) elle manipule des énoncés qui n'ont aucune interprétation physique et pour lesquels on ne peut donc attribuer aucune valeur de vérité, et 2) elle ne peut traiter le cas important de systèmes composés *et ne peut donc représenter le concept d'intrication qui en constitue pourtant une (si ce n'est la) caractéristique essentielle* –selon les mots de Schrödinger.[18] Ces deux constats affaiblissent considérablement la portée et même l'intérêt de la logique quantique standard.

4. Comment traiter la combinaison de contextes complémentaires ?

Est-il possible de surmonter ce problème relatif à la combinaison de contextes complémentaires ? En accord avec les conclusions d'Heelan[19] à ce sujet, Bitbol a proposé la construction d'un langage *méta-contextuel* permettant d'articuler les descriptions contextuelles d'un système quantique et d'en analyser la logique.

---

15 M. L. Dalla Chiara, "Quantum Logic" in *Handbook of Philosophical Logic: Alternatives to Classical Logic,* ed. D. Gabbay et F. Guenthner (Dordrecht: D. Reidel, 1986); M. L. Dalla Chiara et R. Giuntini, "Quantum Logics," ArXiv: quant-ph/0101028, 2008.

16 Diederik Aerts, *The One and the Many.* Doctoral Dissertation, Free University of Brussels 1982.

17 C. Randall and D.J. Foulis, "Tensor Products of Quantum Logics Do Not Exist," *Notices of the American Mathematical Society* 26, 6 (1979):A-557.

18 Erwin Schrödinger, "Discussion of Probability Relations Between Separated Systems," *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society* 31 (1936): 555–563; 32 (1936): 446–451.

19 P. A. Heelan, "Complementarity, Context-Dependence and Quantum Logic," *Foundations of Physics* 1, 2 (1970): 95-110.

Après avoir défini les opérations de conjonction, disjonction, implication et négation de langages relatifs à des contextes différents, cet auteur montre, en particulier, la non distributivité des opérations de conjonction et de disjonction dans cette logique méta-contextuelle.[20]

Mais il est, en fait, possible de tenir compte de la complémentarité des contextes sans faire appel à un langage méta-contextuel, en restreignant simplement l'applicabilité des opérations de combinaison des propositions expérimentales *à des structures booléennes partielles*. C'est cette voie là qui a été proposée par Kochen et Specker ainsi que par Hugues[21] et que nous suivrons car elle nous paraît plus intuitive. Pour cela, il faut interpréter la logique quantique par *une algèbre de Boole partielle transitive* où une relation binaire de compatibilité entre énoncés du langage est introduite:

$$A = (E, \nabla, \wedge , \vee , \urcorner),$$

où ∇, la relation binaire de compatibilité entre les énoncés de E, est supposée *réflexive et symétrique (mais non transitive).* Cette relation peut être définie de la façon suivante:[22]

> Deux propositions p et q sont compatibles s'il existe trois propositions u, v et w orthogonales deux à deux[23] telles que $u \vee v = p$ et $v \vee w = q$.

Ce qui signifie que si deux propositions sont compatibles elles appartiennent à une même (sous-)algèbre de Boole.[24]

La notion de <u>contexte</u>, qui est essentielle, est définie formellement par un ensemble de propositions expérimentales décrivant *l'état de préparation* d'un système. C'est donc un ensemble d'énoncés caractérisant son état et à partir duquel peuvent être dérivés les énoncés expérimentaux relatifs aux résultats de mesures pouvant être effectuées sur ce système. Un contexte peut donc être considéré intuitivement comme une base de données à partir de laquelle peuvent être

---

[20] Bitbol, *Mécanique quantique,* annexe 1.

[21] S. Kochen and E. P. Specker, "The Calculus of Partial Propositional Functions," in *The Logico-Algebraic Approach to Quantum Mechanics*, 277-292. R. I. G. Hughes, "Semantic Alternatives in Partial Boolean Quantum Logic," *Journal of Philosophical Logic* 14, 4 (1985): 411-446.

[22] David W. Cohen, *An Introduction to Hilbert Space and Quantum Logic* (New York: Springer-Verlag, 1989).

[22] L'ensemble des propositions (u, v, w) ainsi caractérisé est appelé « décomposition de compatibilité ».

[24] Notons que deux énoncés « compatibles », appartenant donc à une même sous-algèbre de Boole, peuvent être contradictoires. La notion de « compatibilité » pour des propositions est liée au fait que ces dernières peuvent être dérivées d'un même contexte (voir ci-après) et ne doit pas être confondue avec leur non-contradiction logique.

dérivés tous les énoncés expérimentaux portant sur ce système lorsqu'il est soumis à des mesures. Un contexte sera noté par la lettre Γ indicée par l'état quantique auquel il renvoie: par exemple, Γ_ω est l'ensemble des énoncés caractérisant l'état ω.

Contextes complémentaires. Deux contextes $\Gamma_{\omega 1}$ et $\Gamma_{\omega 2}$ seront dit complémentaires si pour tout couple de propositions (p1, p2) appartenant, respectivement, à $\Gamma_{\omega 1}$ *et* $\Gamma_{\omega 2}$, p1 et p2 ne sont pas compatibles, c'est à dire que (p1 ∇ p2) n'est pas vérifié. Autrement dit, *les propositions de deux contextes complémentaires $\Gamma_{\omega 1}$ et $\Gamma_{\omega 2}$ définissent deux sous-algèbres de Boole distinctes*. La propriété de complémentarité des contextes, qui peut donc être définie comme ci-dessus en se référant au langage objet, sera notée à l'aide du symbole de relation $\perp$, comme $\Gamma_{\omega 1} \perp \Gamma_{\omega 2}$.

Dans une telle structure qui peut être construite à partir d'une famille d'algèbres de Boole (incluant, en l'occurrence, celles qui correspondent à des contextes expérimentaux différents), la conjonction et la disjonction d'énoncés ne sont définies *que pour des couples d'énoncés compatibles* : $\wedge$ et $\vee$ sont ainsi des opérations « partielles », définies à l'intérieur des sous-algèbres de Boole de cette structure, ce qui évite de conjoindre des contextes expérimentaux complémentaires :

$a \wedge b$ et $a \vee b$ ne sont définies que si $a \nabla b$.

En outre, la transitivité de la relation d'ordre qu'on définit à l'aide des opérations algébriques partielles (ne pouvant plus s'appliquer à des énoncés incompatibles) :

$a \leq b$ ssi $a = a \wedge b$ ssi $b = a \vee b$

est maintenant valide:

si $a \leq b$ et $b \leq c$ alors $a \leq c$,

et traduit la compatibilité des énoncés (ou cohérence interne) de chacune des sous-algèbres de E mais pas de ceux appartenant à des sous-algèbres associée à des contextes complémentaires.

Selon cette dernière approche, deux descriptions complémentaires d'un système quantique définissent deux sous-algèbres d'une unique algèbre de Boole partielle distributive régissant l'articulation de l'ensemble d'*énoncés* descriptifs. Alors que dans l'approche développée par Bitbol la complémentarité des contextes se reflète au niveau des propriétés méta-linguistiques (la non-distributivité, en particulier) de la structure régissant l'articulation des différents *langages* contextuels. Néanmoins, dans ces deux approches la complémentarité des descriptions ou des contextes expérimentaux se traduit par la même propriété structurelle: *l'impossibilité de plonger deux descriptions complémentaires dans une seule et unique algèbre de Boole* (qu'elle soit définie comme une algèbre des énoncés ou une algèbre des langages). Cette marque structurelle de la complémentarité se retrouve bien sûr dans les différentes extensions qui ont été proposées de la logique quantique standard par des logiques du premier ordre ou des logiques modales[25], ainsi que dans les logiques quantiques « opérationnelles » associant explicitement aux propriétés des questions traduisant les tests expérimentaux permettant de vérifier ces propriétés et dont les réponses sont soit « oui », soit « non ».[26]

Notons enfin que si dans le cas où deux propositions expérimentales sont relatives à des contextes incompatibles leur combinaison à l'aide des connecteurs $\wedge$ et $\vee$ n'est pas définie, il est par contre possible de combiner ces deux propositions *de façon séquentielle,* c'est à dire en introduisant une notion d'ordre temporel dans leur vérification –ce qui renvoie à une expérience de double-mesure non pas simultanées mais effectuées l'une après l'autre. Pour exprimer cette idée, nous introduirons un connecteur « puis », noté $\wp$, permettant de donner un sens expérimental, et donc une valeur de vérité, à la formule :

$$p1 \wp p2$$

même si p1 et p2 ne sont pas compatibles.

En prenant en compte la définition de ce connecteur $\wp$, la logique quantique, que nous appellerons L1, relative à la description d'un système quantique *non composé* sera définie de la façon suivante :

Logique quantique L1

- Langage propositionnel :

Prop : Un ensemble dénombrable de symboles de proposition qui s'interprètent intuitivement par les propositions expérimentales utilisées pour décrire le système

Connecteurs de conjonction, de disjonction, de négation, ainsi qu'un connecteur « puis », noté $\wp$, permettant de tenir compte de la non-commutativité des mesures: $\wedge$, $\vee$, $\rceil$, $\wp$

[25] Dalla Chiara, "Quantum logic," Dalla Chiara et Giuntini, "Quantum Logics."

[26] Hughes, "Semantic Alternatives," 411-446; J. M. Jauch, *Foundations of Quantum Mechanics* (Reading, MA: Addison-Wesley, 1968).

Le connecteur $\wp$ introduit une notion d'ordre (et donc une temporalité) dans l'évaluation des énoncés : « p1 $\wp$ p2 » signifie intuitivement que p2 est évaluée *après* p1.

- Sémantique : La logique quantique est, comme nous l'avons notée ci-dessus, interprétée dans une algèbre de Boole partielle transitive:

$A = (E, \nabla, \wedge , \vee , \rceil).$

Il paraît naturel de définir une *sémantique probabiliste* dans la mesure où les propositions expérimentales sont évaluées par leur probabilité d'occurrence qui nous est fournie par la règle de Born-Gleason de la théorie quantique. En outre, cette valeur de probabilité étant relative à une « préparation » donnée, qui est encodée dans un vecteur d'état, nous définirons la valeur de vérité d'un énoncé par une *probabilité conditionnelle*. Une proposition expérimentale, telle que nous l'avons définie à la section 1, renvoie à une observable (ou une grandeur) et un domaine de valeurs possibles :

$p =_{df} (Q, D)$,

ce qui signifie que « la mesure de la propriété Q a pour résultat un nombre de l'intervalle (ou de la réunion d'intervalles) D de l'ensemble des réels ». La valeur de vérité de p se définit alors par la probabilité de mesurer la valeur de l'observable Q dans le domaine D *si* le système est préparé dans l'état ω, c'est à dire :

$V\omega (p) = | | \Pi_{(Q,D)} \omega | |^2$

où $\Pi_{(Q,D)}$ est l'opérateur projection sur le sous-espace de Hilbert H du système considéré relatif à l'observable Q et l'intervalle D. L'opérateur $\Pi_{(Q,D)}$ s'applique à l'état ω dans lequel a été préparé le système avant la mesure et cette probabilité est définie par le carré de la norme du vecteur $\Pi_{(Q,D)}\, \omega$ obtenu par cette projection de ω.

Comme mentionné ci-dessus, les valeurs de vérité de la conjonction et de la disjonction de deux énoncés $\phi 1$ et $\phi 2$ *ne sont définies que pour deux énoncés compatibles, appartenant à une même sous-algèbre de Boole.* Dans ce cas, c'est à dire <u>*si* $\nabla(\phi 1, \phi 2)$,</u> la sémantique probabiliste verifie les axiomes des probabilités classiques (positivité, additivité, monotonie) alors que les valeurs de vérité de la négation et de la disjonction, qui sont, rappelons-le, des probabilités *conditionnelles*, seront définies par :

$V_\omega (\rceil\ \phi) =_{df} 1 - V_\omega (\phi)$

$V_\omega (\phi 1 \vee \phi 2) =_{df} V_\omega (\phi 1) + V_\omega(\phi 2) - V_\omega (\phi 1 \wedge \phi 2),$

la valeur de vérité V_ω ($\phi1 \wedge \phi2$) de la conjonction $\phi1 \wedge \phi2$ ne pouvant se réduire au produit de leur valeur de vérité $V_\omega(\phi1) . V_\omega(\phi2)$ que *si $\phi1$ et $\phi2$ sont indépendants* –en conformité avec le calcul classique des probabilités.

Dans le cas important où *les énoncés $\phi1$ et $\phi2$, ne sont pas compatibles*, c'est à dire si $\nabla(\phi1,\phi2)$ n'est pas réalisé, ni la conjonction ni la disjonction n'ont de sens mais le connecteur « puis » défini ci-dessus permet de décrire ce phénomène de complémentarité qui constitue, avec celui d'intrication que nous aborderons dans la section suivante, l'une des deux caractéristiques essentielles de la théorie quantique. Il faut pour cela définir sa valeur de vérité par :

$$V_\omega(\phi1 \wp \phi2) =_{df} V_\omega(\phi1) . V_{\omega1}(\phi2) = \|\Pi_{(Q2,D2)} \Pi_{(Q1,D1)} \omega\|^2$$

Dans cette définition, $\omega1$ est l'état du système *après* que la mesure de Q1 ait donné un résultat dans l'intervalle D1, il fixe le nouveau contexte $\Gamma_{\omega1}$ dans lequel va être calculée la probabilité que Q2 prenne une valeur de D2. La valeur de vérité de la combinaison de deux énoncés incompatibles par le connecteur $\wp$ se définit donc en faisant appel à deux contextes différents et ne peut se calculer seulement à partir du contexte initial Γ_ω. Dans le cas où les énoncés $\phi1$ et $\phi2$ sont compatibles, la définition du connecteur $\wp$ se réduit bien sûr à celle du connecteur $\wedge$ puisque la mesure de Q1 ne change pas le contexte Γ:

Si $\nabla(\phi1 , \phi2)$, alors $V_\omega(\phi1 \wp \phi2) = V_\omega(\phi1 \wedge \phi2)$.

- Axiomes et règles d'inférences :

Dans chaque sous-algèbre de Boole, les axiomes et/ou les règles d'inférences sont celles du calcul des propositions classique (qui ne seront pas ré-écrites ici –voir, par exemple, David et al. 2003, chap. 1).

Le connecteur $\wp$ permettant de combiner deux propositions p = (P, D) et q = (Q, D') appartenant à deux sous-algèbres de Boole distinctes est caractérisé par une règle d'inférence qui exprime l'idée que la mesure de l'observable P dans l'intervalle D place le système dans un état ω_P qui détermine un nouveau contexte, noté simplement Γ_P pour alléger la notation, dans lequel s'effectuera la mesure de l'observable complémentaire Q -ce qui signifie que la mesure de P efface (partiellement, du moins) l'information relative à l'état de préparation initiale du système, d'où la règle suivante, qui s'apparente à une règle d'élimination de $\wp$ (et traduit à un changement de contexte) :

$$\frac{\Gamma \vdash p \wp q}{\Gamma_P \vdash q} \quad \wp e$$

Notre but est maintenant de caractériser le concept d'*intrication* dans le cadre de cette logique quantique enrichie du connecteur $\wp$ qui permet de rendre compte de la propriété de complémentarité du domaine quantique et de son interprétation en termes d'algèbre de Boole partielle transitive.

5. L'intrication (logique L2)

La notion d'*intrication* fait intervenir les descriptions relatives à *deux ou plusieurs sous-systèmes* d'un système composé ou la description de degrés de libertés indépendants d'un même système. Afin de porter notre attention sur le phénomène d'intrication qui peut être vérifié expérimentalement par l'observation de corrélations non-locales entre deux sous-systèmes S1 et S2 séparés ou causalement isolés (ce qui signifie que les observables de S1 commutent toutes avec les observables de S2), nous supposerons dans la suite que cette dernière hypothèse est toujours réalisée –car c'est bien ce type de corrélations que nous cherchons à caractériser et non l'existence d'une interaction directe entre ces deux sous-systèmes.

Comme nous l'avons souligné à la section 3, une telle logique de l'intrication n'a pas été développée à cause de la difficulté, voire l'impossibilité, d'effectuer une structure « produit » des algèbres orthomodulaires de la logique quantique standard relatives aux sous-systèmes considérés –algèbres qui autorisaient de façon inappropriée la conjonction et la disjonction de propositions incompatibles[27]. Cependant, ce problème peut être résolu si, comme c'est ici le cas, nous interprétons la logique quantique par une *algèbre de Boole partielle transitive*. En effet, Coray[28] a montré que le produit d'algèbres de Boole partielles transitives est aussi une algèbre de Boole partielle transitive. L'algèbre de Boole partielle transitive du système composé S1 + S2 peut s'écrire de la façon suivante:

A = (E1 X E2, ∇, & , Υ , N).

Dans cette notation, E1 et E2 sont, respectivement, les ensembles de propositions expérimentales descriptives de S1 et de S2, et E1 X E2 est leur produit cartésien. La relation de compatibilité ∇ de A s'applique ici aux couples d'énoncés de E1 X E2. Les symboles &, Υ et N désignent, respectivement, des connecteurs de conjonction, de disjonction et de négation permettant de relier les énoncés de E1

[27] Il faut cependant noter des propositions récentes pour caractériser le concept d'intrication en terme de capacité de *transfert d'information* ou de *propriétés épistémiques* qu'il serait possible d'attribuer aux (sous-)systèmes considérés.

[28] Giovanni Coray,"Validité dans les algèbres de Boole partielles,"*Commentarii Mathematici Helvetici,* 45, 1 (1970): § I.6.

et E2. Par exemple, l'énoncé « p1 & p2 » peut se comprendre comme « le système S1 peut être décrit par l'énoncé p1 et le système S2 par l'énoncé p2 ». Ces connecteurs qui permettent de former des énoncés à partir de propositions descriptives du système composé S1 + S2 obéissent aux règles classiques de la conjonction, de la disjonction et de la négation *sous l'hypothèse* que S1 et S2 sont « séparés » ou causalement isolés (ce qui signifie que toutes les observables de S1 commutent avec celles de S2). Une hypothèse que nous adoptons ici afin de nous concentrer sur les seules spécificités quantiques, l'existence d'une interaction directe entre sous-systèmes pouvant être traitée classiquement.

Le concept essentiel d'intrication de l'état d'un système composé S1 + S2 renvoie à une combinaison linéaire *particulière* de produits d'états possible de chacun de ses sous-systèmes. Cette combinaison est « particulière » car elle reflète la préparation de ce système composé qui l'a placé dans cet état particulier. Par exemple, un système de deux particules de spin demi-entier peut être préparé dans un état dit « sigulet », ce qui veut dire que nous ne pourrons mesurer que des couples de spins opposés (selon une même direction). Plus généralement, un état intriqué du système composé S1 + S2 renvoie à l'association de deux contextes particuliers Γ1 et Γ2 de S1 et S2 permettant de dériver *une partie seulement* des énoncés obtenus en combinant les propositions de E1 et celles de E2 à l'aide des connecteurs booléens « mixtes » & , ϒ et N -alors que si le système composé des deux sous-systèmes causalement séparés (c'est l'hypothèse adoptée) n'est pas dans un état intriqué, rien ne restreint alors l'ensemble de ces énoncés qui sont tous a priori dérivables des contextes associés aux *états produits* $\omega = \omega 1 \otimes \omega 2$.

Lorsque le système composé est dans un état intriqué, il existe donc deux contextes Γ1 et Γ2 de S1 et S2 qui définissent deux sous-algèbres de Boole dans chacune des algèbres A1 et A2 et qui se combinent pour former un nouveau contexte, noté $\Gamma 1 \propto \Gamma 2$, où seulement certains énoncés de A1 X A2 pourront être dérivés. L'opération d'intrication, notée $\propto$, relie les deux contextes Γ1 et Γ2 et peut donc être caractérisée par une série d'axiomes qui expriment l'idée que le contexte $\Gamma 1 \propto \Gamma 2$ ne peut dériver *qu'une sélection d'énoncés de A1 X A2*.

Considérons, pour simplifier cette présentation, que les espaces H1 et H2 associés aux deux sous-système S1 et S2 sont à deux dimensions, c'est à dire que E1 et E2 ne contiennent que deux propositions p1 et p2 distinctes et différentes de la tautologie **V** et de l'antilogie **F**, ainsi que leurs négations. L'ensemble E1 X E2 s'écrit donc :

E1 X E2 ={(p1, p2), (p1, ⌉ p2), (⌉ p1, p2), (⌉ p1, ⌉ p2)}.

L'intrication de S1 et S2, qui ne fait que traduire plus précisément l'intrication de contextes particuliers de S1 et S2 respectivement, pourra alors se traduire par l'axiome suivant qui restreint l'ensemble des énoncés de E1 X E2 dérivables du contexte intriqué $\Gamma 1 \propto \Gamma 2$:

$$\Gamma 1 \propto \Gamma 2 \vdash (p1 \;\&\; \rceil p2), (\rceil p1 \;\&\; p2).$$

Cet axiome exprime l'idée selon laquelle l'intrication de l'état du système composé S1 + S2, relativement aux observables dont les résultats possibles sont décrits par les propositions p1, $\rceil$ p1 (pour S1) et p2, $\rceil$ p2 (pour S2), a pour conséquence que nous ne pouvons observer que seulement les deux descriptions représentées par les énoncés $(p1 \;\&\; \rceil p2)$ et $(\rceil p1 \;\&\; p2)$ –au lieu de quatre descriptions possibles. Ces dernières descriptions sont les seules qui sont permises par la préparation initiale, alors que les deux autres énoncés descriptifs ne sont pas dérivables dans le contexte $\Gamma 1 \propto \Gamma 2$.

Ce point peut être illustré en considérant, comme ci-dessus, un système de deux particules de spin ½ préparé dans un état singulet pour lequel une mesure conjointe du spin dans une direction donnée ne peut donner comme résultat que (+1/2 & -1/2) ou (-1/2 & +1/2), les propositions descriptives étant ici définies par :

p1 = (S1, +1/2) ; p2 = (S2, +1/2),

et leur négation en changeant le signe de la valeur du spin.

Dans le cas où les systèmes physiques considérés ont plus de deux dimensions, cette idée peut être généralisée en disant que le membre de droite du séquent ci-dessus ne contient que certaines des conjonctions de propositions de E1 et E2, ce qui signifie que seulement certains de ces énoncés seront dérivables à partir du contexte $\Gamma 1 \propto \Gamma 2$.

Enfin, le théorème de Landau[29] et ses extensions[30] nous permettent de relier les concepts de complémentarité et d'intrication. Ces théorèmes nous enseignent que la complémentarité des contextes dans chacune des algèbres A1 et A2 est une condition *nécessaire* à l'existence de corrélations non-locales entre S1 et S2, et donc à l'existence d'états intriqués pour le système composé S1+S2. Ce point est corroboré par le fait que les résultats d'une expérience de mesure de corrélations entre des observables de deux sous-systèmes *classiques* (où toutes les observables commutent) sont totalement conformes au calcul classique des probabilités.[31] Les

---

[29] Lawrence J. Landau, "On the Violation of Bell's Inequality in Quantum Theory," *Physics Letters A* 120, 2 (1987): 54-56.

[30] Uzan, "On the Nature of Psychophysical Correlations."

[31] Par exemple, l'expérience d'Aspect (Alain Aspect, Philippe Grangier et Gérard Roger, "Experimental Realization of Einstein-Podolsky-Rosen-Bohm Gedankenexperiment: A New Violation of Bell's Inequalities," *Physical Review Letters* 49, 2 (1982): 91) a bien confirmé les prédictions de la mécanique quantique pour des observables de polarisation selon des directions différentes *qui sont complémentaires dans chacun des sous-systèmes*. Cette même expérience

concepts de complémentarité et d'intrication peuvent donc être reliés en affirmant, dans le méta-langage nous permettant de parler des contextes et de leurs propriétés, que :

> Si $\Gamma 1 \propto \Gamma 2$, alors il existe un contexte $\Gamma' 1$ de S1et un contexte $\Gamma' 2$ de S2 tels que $\Gamma 1 \perp \Gamma' 1$ et $\Gamma' 2 \perp \Gamma' 2$. [32]

Conclusion

Comme il a été rappelé dans cet article, dans le prolongement des remarques de Bitbol[33] et de Heelan[34] à ce sujet, la logique régissant le domaine quatique *ne peut être identifiée à la logique des projecteurs sur les sous-espaces d'un espace de Hilbert*. La raison est que des énoncés descriptifs appartenant à des sous-algèbres de Boole disjointes, et définissant donc des contextes expérimentaux (et linguistiques) différents ne peuvent être composés. C'est pour cela qu'il nous faut interpréter les énoncés descriptifs d'un système quantique à l'aide d'une algèbre de Boole partielle transitive, permettant de représenter la *complémentarité des contextes*. Nous avons, en outre, défini sur cette structure une sémantique probabiliste conditionnelle qui semble adaptée au domaine quantique où les résultats d'une expérience ne peuvent être, par la structure même de la théorie quantique (existence d'observables complémentaires) et non pour des raisons épistémiques, prédits *que selon une loi probabiliste.*

La complémentarité des contextes, qui peut se représenter à l'aide d'une règle d' « élimination » du connecteur $\wp$ (« puis ») qui est spécifique du domaine quantique, se traduit par l'impossibilité de les plonger dans une même algèbre de Boole. L'intrication de l'état d'un système composé de deux sous-systèmes S1 et S2 d'énoncés descriptifs E1 et E2 peut être représentée par un schéma d'axiomes restreignant l'ensemble des énoncés composés de E1XE2 pouvant décrire ce système. Nous avons enfin mentionné le fait que l'intrication de contextes définis sur deux sous-systèmes d'un système composé n'est possible que s'il existe au moins un contexte complémentaire du contexte de préparation de chacun de ces deux sous-systèmes.

---

effectuée avec des systèmes classiques (observables commutatives) ne laisserait bien sûr apparaître aucune déviation significative avec le calcul classique des probabilités.

[32] Rappelons qu'un contexte expérimental est relatif à un certain état de préparation du système dont il s'agit. $\Gamma' 1$ et $\Gamma' 2$ renvoient donc ici à des préparations de chacun des sous-systèmes S1 et S2 qui permettent de mesurer des observables complémentaires de celles définissant les contextes $\Gamma 1$ et $\Gamma 2$.

[33] Bitbol, *Mécanique quantique*.

[34] Heelan, "Complementarity, Context-Dependence."

La logique de l'intrication ébauchée ici demande bien sûr à être précisée et sa complétude relativement aux structures d'algèbres de Boole partielles transitives pourrait être montrée à partir de celle de la logique propositionnelle classique relativement à chacune des sous-algèbres de Boole (ce qui est un fait déjà établi) et de la (fiabilité et la) complétude des nouvelles règles et axiomes introduits pour caractériser les propriétés typiquement quantiques de complémentarité et d'intrication. Ce qui constitue l'objet d'un travail en cours.